DS n°7.5 : Anneaux, matrices et systèmes, polynômes (rattrapage)

Durée : **3h**. Calculatrices non autorisées
Le soin et la clarté de la rédaction pourront faire varier la note de ± 1 point. Il n'est pas attendu que vous arrivez au bout du sujet (le barème dépassera 100 points). Faites primer la qualité sur la quantité.

Problème 1 : Algèbre et diagonalisation

Dans tout ce problème, on note $M^\top$ la transposée d'une matrice M, et on pose

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Partie A : diagonalisation de A

1) On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}. Vérifier que P^{-1} est à coefficients entiers.

2) Calculer $P^{-1}AP$ et vérifier que c'est une matrice diagonale. On la notera D dans la suite.

Partie B : commutant de A L'objectif de cette partie est de déterminer le *commutant* de la matrice A, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.
Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $N = P^{-1}MP$.

3) Montrer l'équivalence suivante : $AM = MA \iff DN = ND$

4) Par un calcul, déterminer l'ensemble des matrices $N \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $DN = ND$.

5) Déterminer cinq matrices $J_1, \cdots, J_5$ (qu'on ne demande pas de calculer explicitement mais qu'on exprimera en fonction de matrices de l'énoncé et/ou de matrices remarquables) telles que

$$\forall M \in M_3(\mathbb{R}) \qquad \left(AM = MA \iff \exists \alpha_1, \cdots, \alpha_5 \in \mathbb{R} \quad M = \sum_{k=1}^{5} \alpha_k J_k \right)$$

Partie C : commutant bis

6) On note Z le commutant de A, c'est-à-dire :

$$Z = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$$

Montrer que $(Z, +, \times)$ est un anneau.

7) Cette question est indépendante des précédentes. Déterminer le commutant de $J = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $MJ = JM$.

Partie D : calcul des puissances de A

8) Pour tout entier naturel n, expliciter D^n. Justifier que cette expression de D^n reste valide si n est un entier négatif.

9) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P^{-1} D^n P$.

10) En déduire A^n pour tout entier naturel n.

Partie E : équation matricielle Dans la suite du problème, on s'intéresse à l'équation suivante d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$(E) : \qquad M^\top DM = D$$

On note G l'ensemble de solutions de (E), c'est-à-dire :

$$G = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid M^\top DM = D \right\}$$

11) Montrer que $\quad \forall M, N \in G \quad MN \in G$.

12) Soit $M \in G$. Montrer que M est inversible et exprimer son inverse en fonction de M et D.

13) En déduire que pour toute matrice M, on a $\big(M \in G \implies M^{-1} \in G\big)$.

14) Montrer que $(G, \times)$ est un sous-groupe de $(GL_3(\mathbb{R}), \times)$.

15) Est-il vrai que $(G, +, \times)$ est un sous-anneau de $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$?

Problème 2 : Polynômes de Legendre

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les polynômes P_n et L_n de $\mathbb{R}[X]$ par :

$$P_n = (X^2 - 1)^n \qquad L_n = P_n^{(n)}$$

Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre.*

1) Expliciter L_0, L_1 et L_2

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n.

3) En utilisant le fait que $P_n = (X-1)^n (X+1)^n$ et la formule de Leibniz, réécrire L_n sous forme d'une somme de polynômes.

4) En déduire les valeurs de $L_n(1)$ et $L_n(-1)$.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, déterminer $P_n^{(k)}(1)$ et $P_n^{(k)}(-1)$

6) Soit $m \geq 2$ un entier et Q un polynôme réel qui possède m racines distinctes $\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_m$. Montrer que Q' possède $m-1$ racines distinctes strictement comprises entre α_1 et α_m.

7) Montrer que L_n possède n racines distinctes, toutes dans $]-1, 1[$. Que peut-on dire sur leurs multiplicités ?

Monsieur et Madame "De $1 = 0$" ont une fille. Comment peut-elle bien s'appeler ? Réponse : Hélène.